●●●○○ IR-TCI 3G 2:25 PM 44%

[illegible]

سؤال اول (۲ نمره)

الف- اگر ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = \frac{\sin 4(t-1)}{\pi(t-1)}$ بصورت $x(t) = \frac{\sin 6(t-1)}{\pi(t-1)}$ باشد خروجی $y(t)$ را بیابید

ب- اگر پاسخ ضربه بصورت $h(t) = \frac{8t}{(t^2+16)^2}$ و ورودی بصورت $x(t) = \cos 5t$ باشد خروجی $y(t)$ چگونه است.

سؤال دوم (۳ نمره)

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n] = \frac{1}{3}^n u[n]$ به یک سیستم علی LTI دیگر با پاسخ ضربه $h_2[n]$ بطور موازی متصل ...

... چنانچه پاسخ فرکانسی سیستم حاصل بصورت $H(j\omega) = \frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$ باشد.

... پاسخ ضربه $h_2[n]$ را بیابید.

خروجی سیستم $h_2[n]$ را برای ورودی $x_2[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(-\frac{7}{8}\right)^n$ تعیین کنید.

$-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

...ال سوم (۲ نمره)

یک سیستم LTI علی بازای ورودی $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \underbrace{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]}$ خروجی $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ را تولید ...

پاسخ فرکانسی، پاسخ ضربه و معادله تفاضلی آن چگونه بایستی باشد.

(ادامه سؤالات در پشت برگه)

...ال چهارم (۳ نمره)

...طه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علی توسط معادله تفاضلی زیر بیان شده است.

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

- تابع سیستم $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ را بیابید.

- نمودار صفر و قطبهای سیستم را رسم نموده و ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

- در باره پایداری سیستم تحقیق کنید.

- پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

- ورودی $x[n]$ چگونه بایستی باشد تا خروجی $y[n]$ بصورت زیر باشد.

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

...ال پنجم (۳ نمره)

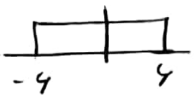
... تبدیل یک سیستم خطی بصورت زیر است.

$$H(s) = \frac{32(s^2+s+1)(s^2+150s+\overset{5000}{\cancel{500}})}{15s(s^2+15s+50)(s^2+1000s+10^6)}$$

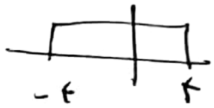
... نمودار (Bode) دامنه آنرا در کاغذ نیمه لگاریتمی داده شده رسم نمائید.

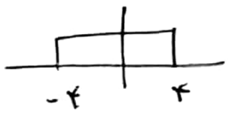
نمونه سؤال پایان ترم:

۱-الف-

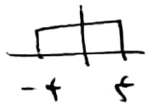
$$x(t)=\frac{\sin(6(t-1))}{\pi(t-1)} \Rightarrow X(j\omega)=$$  $$e^{-j\omega}$$

به خاطر یک واحد شیفت

$$h(t)=\frac{\sin 4(t-1)}{\pi(t-1)} \Rightarrow H(j\omega)=$$  $$e^{-j\omega}$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)=$$  $$\cdot$$  $$e^{-2j\omega}$$

★ به خاطر دامنه‌ها و محدود شدن آن توسط مستطیل دوم، داریم:

$$Y(j\omega)=$$  $$e^{-2j\omega} \Rightarrow y(t)=\frac{\sin(4(t-2))}{\pi(t-2)}$$

ب) فقط از خاصیت دوگانی حل شود.

$$h(t)=\frac{8t}{(t^2+16)^2}$$

اگر داشتیم: $$H_1(j\omega)=\frac{4\times 2}{\omega^2+16} \Rightarrow h_1(t)=e^{-4|t|}$$

خاصیت دوگانی:

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(jt) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega}H_1(j\omega) \longrightarrow -jt\,h_1(t)$$

$$\frac{-8\times 2\omega}{(\omega^2+16)^2} \longrightarrow -jte^{-4|t|}$$

$$\Rightarrow \frac{8\omega}{(\omega^2+16)^2} \longrightarrow \tfrac{1}{2}jte^{-4|t|}$$

ادامه صفحه بعد

خاصیت دوگانی $\Longrightarrow$ $$\frac{8t}{(t^2+16)^2} \Longrightarrow 2\pi \tfrac{1}{2} j(-\omega)\, e^{-4|-\omega|}$$

$\downarrow$ $h(t)$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = -\pi j\omega\, e^{-4|\omega|}}$$

$$x(t) = \cos 5t \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2} e^{5jt} + \tfrac{1}{2} e^{-5jt}$$

$$e^{ajt} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow H(ja)\, e^{jat}$$

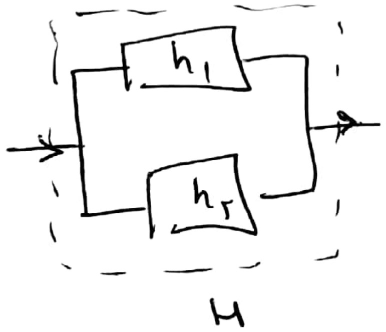
$$\Rightarrow y(t) = \tfrac{1}{2} H(5j)\, e^{5jt} + \tfrac{1}{2} H(-5j)\, e^{-5jt}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2}(\underbrace{-\pi j 5\, e^{-4\times 5}}_{-b})\, e^{5jt} + \tfrac{1}{2}(\underbrace{-\pi j(-5)\, e^{-4\times 5}}_{+b})\, e^{-j5t}$$

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} b \sin 5t$$

b را حساب کنید با ماشین حساب

۲- الف)



$$H = H_1 + H_2$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

$$\frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}} + H_2$$

ادامه صفحه بعد

$$\frac{-12+5e^{-j\omega}}{(12-7e^{-j\omega}+e^{-2j\omega})} = \frac{-1+\frac{5}{12}e^{-j\omega}}{(1-\frac{7}{12}e^{-j\omega}+\frac{1}{12}e^{-2j\omega})}$$

از ۱۲ فاکتور می‌گیریم

$$= \frac{-1+\frac{5}{12}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$\Rightarrow \frac{-1+\frac{5}{12}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = H_2$$

$$\Rightarrow \frac{-1+\frac{5}{12}e^{-j\omega}-(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = H_2(j\omega)$$

$$\frac{-2+\cancel{\frac{8}{12}}^{\,2/3}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = H_2$$

$$\Rightarrow H_2 = -2\,\frac{\cancel{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}}{\cancel{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$\Rightarrow h_2[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \leftarrow$ چون سیستم علی است پس $u[n]$ شد.

ادامه صفحه بعد

ب)

$$x_2[n] = \underbrace{(-\tfrac{1}{4})^n u[n]}_{x_{12}} + \underbrace{(-\tfrac{7}{8})^n}_{x_{22}}$$

$$X_{12}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow Y_{12}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\, X_{12}(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow Y_{12}(e^{j\omega}) = \frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{-2}{1-\frac{1}{16}e^{-2j\omega}}$$

تقسیم به کسرهای جزئی $: \; Y_{12}(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{-2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$

$$e^{-j\omega} = 4 \Rightarrow A = \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$e^{-j\omega} = -4 \Rightarrow B = \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$\Rightarrow \cancel{Y_{12}(e^{-j\omega})} = -(\tfrac{1}{4})^n u[n] - (-\tfrac{1}{4})^n u[n] = y_{12}[n]$$

$$y_{22}[n] = \underbrace{H_2(e^{-j(\frac{7}{8})})}\,(-\tfrac{7}{8})^n \Rightarrow y_{22}[n] = b\,(-\tfrac{7}{8})^n$$

$b =$ با ماشین حساب محاسبه شود.

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = y_{12}[n] + y_{22}[n]}$$

-۳

$$x[n] = (1/2)^n u[n] - 1/4 (1/2)^{n-1} u[n-1]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 1/2\, e^{-j\omega}} - \frac{1/4\, e^{-j\omega}}{1 - 1/2\, e^{-j\omega}} = \frac{1 - 1/4\, e^{-j\omega}}{1 - 1/2\, e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = (1/3)^n u[n] \Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 1/3\, e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\dfrac{1}{1 - 1/3\, e^{-j\omega}}}{\dfrac{1 - 1/4\, e^{-j\omega}}{1 - 1/2\, e^{-j\omega}}} = \boxed{\frac{1 - 1/2\, e^{-j\omega}}{(1 - 1/3\, e^{-j\omega})(1 - 1/4\, e^{-j\omega})}}$$

پاسخ فرکانسی

تقسیم به کسرهای جزئی :

$$\frac{1 - 1/2\, e^{-j\omega}}{(1 - 1/3\, e^{-j\omega})(1 - 1/4\, e^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - 1/3\, e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - 1/4\, e^{-j\omega}}$$

$$e^{-j\omega} = 3 \Rightarrow A = \frac{1 - 1/2 \times 3}{1 - 1/4 \times 3} = \frac{-1/2}{1/4} = -\frac{1}{8}$$

$$e^{-j\omega} = 4 \Rightarrow B = \frac{1 - 1/2 \times 4}{1 - 1/3 \times 4} = \frac{-1}{-1/3} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = -\frac{1}{8} (1/3)^n u[n] + 3 (1/4)^n u[n]}$$

پاسخ ضربه

ادامه صفحه بعد

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{7}{12} e^{-j\omega} + \frac{1}{12} e^{-2j\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

طرفین وسطین ⇐

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{7}{12} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{12} e^{-2j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] - \frac{7}{12} y[n-1] + \frac{1}{12} y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2} x[n-1]}$$

معادله تفاضلی

۴-

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

الف)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \; ; \quad Y(z) - \frac{1}{4} z^{-1} Y(z) - \frac{1}{8} z^{-2} Y(z) = X(z) + z^{-1} X(z)$$

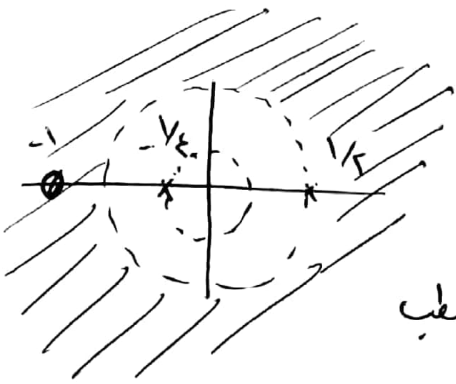
$$\Rightarrow Y(z)\left[1 - \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}$$

ب)

قطب ها $\boxed{z = -\frac{1}{4}}$ ، $\boxed{z = \frac{1}{2}}$

صفرها $\boxed{z = -1}$



چون سیستم علی است ⇐ دست راستی است ⇐ ROC خارج بیرونی ترین قطب

ج) چون ROC دایره واحد را در بر دارد ⇐ پایدار است.

ادامه صفحه بعد

(د)

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{A}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}+\frac{B}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$z^{-1}=-4 \;:\; A=\frac{1-4}{1-\frac{1}{2}(-4)}=\frac{-3}{1+2}=-1$$

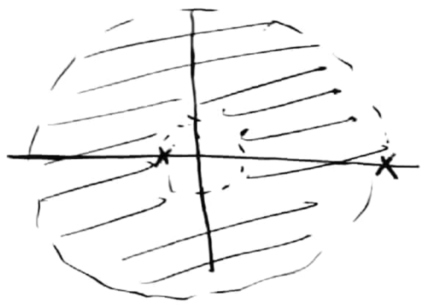
$$z^{-2}=2 \;:\; B=\frac{1+2}{1+\frac{1}{4}\times 2}=\frac{3/1}{3/2}=2$$

$$H(z)=\frac{-1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xRightarrow{\text{علّی}} \boxed{h[n]=(\tfrac{1}{2})^n u[n]-(-\tfrac{1}{4})^n u[n]}$$

(ه)

$$y[n]=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n]-\frac{4}{3}(2)^n[-n-1]$$

$$Y(z)=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}$$



ناحیه همگرایی Y

درست می‌شود

$$X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{\dfrac{-\frac{1}{3}}{\cancel{1+\frac{1}{4}z^{-1}}}}{\dfrac{1+z^{-1}}{\cancel{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}+\frac{\dfrac{-\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}}}{\dfrac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}$$

ادامه صفحه بعد

$$\frac{-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+z^{-1}} + \frac{+\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1}) + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$\frac{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$\frac{+1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{2}{2} = \frac{-(-2 - z^{-1} + z^{-2})}{3(1+z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$= \frac{-(z^{-1}-2)\cancel{(z^{-1}+1)}}{\cancel{(1+z^{-1})}(1-2z^{-1})} \Rightarrow X(z) = \frac{-z^{-2}-2}{1-2z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{-z^{-2}}{1-2z^{-1}} + \frac{-2}{1-2z^{-1}} \Rightarrow x[n] = (2)^{n-2}u[-n-3] + 2(2^{n})u[-n-1]$$

* به ناحیه همگرایی دقت کنید. به علت سمت چپی شدن خروجی، باید ورودی سمت چپی باشد تا ناحیه‌ی همگرایی ۲ را توجیه کند.

$$H(j\omega) = \frac{32\left((j\omega)^2 + j\omega + 1\right)\left((j\omega)^2 + 150j\omega + 5000\right)}{15j\omega\left((j\omega)^2 + 15j\omega + 50\right)\left((j\omega)^2 + 1000j\omega + 10^6\right)}$$

* صورت نرمال درجه ۲ : $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \Longleftarrow (j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2$

* شرط درجه ۲ بودن: $0 < \zeta < 1$

(1) $(j\omega)^2 + j\omega + 1$: $\omega_n = 1 \Rightarrow 2\zeta = 1 \Rightarrow \zeta = 1/2 \longrightarrow$ درجه ۲

$$\boxed{\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1} \longrightarrow \boxed{\omega_n = 1}$$

(2) $(j\omega)^2 + 150j\omega + 5000$: $\omega_n = \sqrt{5000}$ ، $2\zeta\sqrt{5000} = 150 \Rightarrow \zeta = \frac{150}{2\sqrt{5000}} \simeq 1.06$

$\Rightarrow$ دو تا درجه ۱ است: $(j\omega)^2 + 150j\omega + 5000 = (j\omega + 50)(j\omega + 10)$

$$\boxed{5000\left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)} \qquad \boxed{\alpha = 50, 10}$$

(3) $(j\omega)^2 + 15j\omega + 50$: $\omega_n = \sqrt{50}$ ، $2\zeta\sqrt{50} = 15 \Rightarrow \zeta = \frac{15}{2\sqrt{50}} \simeq 1.06$

$(j\omega)^2 + 15j\omega + 50 = (j\omega + 5)(j\omega + 10)$ $\Rightarrow$ دو تا درجه ۱

$$\boxed{50\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)} \qquad \boxed{\alpha = 10, 5}$$

(4) $(j\omega)^2 + 1000j\omega + 10^6 \Rightarrow \omega_n = 1000$ ، $2\zeta 1000 = 1000$

$\zeta = 1/2 \Rightarrow$ درجه ۲

$$\boxed{10^6\left(\left(\frac{j\omega}{1000}\right)^2 + \frac{1000j\omega}{1000^2} + 1\right)} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 10^3}$$

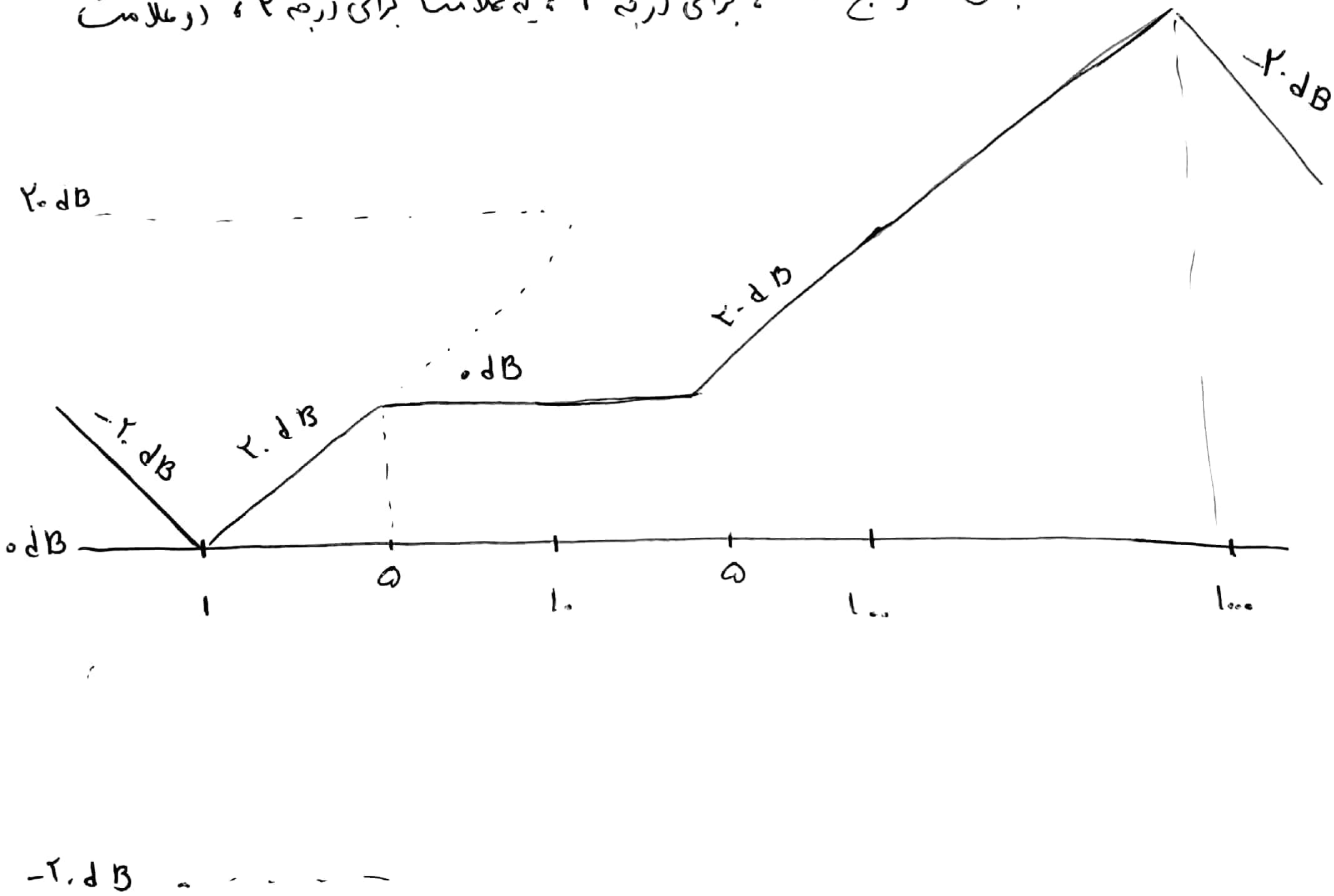
ادامه صفحه بعد

مرتب کردن فرکانس های گوشه از کوچک به بزرگ : 1^{++} ، 1^{-} ، 5^{-} ، 10^{+} ، 10^{-} ، 50^{+} ، 10^{3--}

ک مخرج

خنثی می‌شوند.

* برای صورت + و برای مخرج - ، برای درجه ۱ ، یه علامت برای درجه ۲ ، دو علامت



$$H(j\omega) = \frac{۳۲۲ \; ۵۰۰۰ \left(\left(\frac{j\omega}{۱}\right)^2 + \frac{j\omega}{۱} + ۱\right)\left(\frac{j\omega}{۵۰} + ۱\right)\left(\frac{j\omega}{۱۰} + ۱\right)}{۱۵ \times ۱۰ \times ۵ \times ۱۰^۶ \left(\frac{j\omega}{۵} + ۱\right)\left(\frac{j\omega}{۱۰} + ۱\right)\left(\left(\frac{j\omega}{۱۰^۳}\right)^2 + \frac{j\omega}{۱۰^۳} + ۱\right)}$$

b = یک عدد

$C = ۲۰ \log b \implies$ کل نمودار را به اندازه ی C واحد شیفت به بالا می دهیم. یعنی جایی که خط ۰dB هست C dB می شود.